

Paracuru-CE

Data: 07/03/2026

Autor: David Dias Marques

E-mail: davidmarquesdias4@gmail.com

Título: 019 - ANÁLISE DO VALOR DAS MÉDIAS E SUAS ESTRUTURAS DENTRO DO OBJETO DO  $\Delta$ SEQ<sup>2</sup> ESBELTO

PALAVRAS CHAVES: quadra, própria, imprópria, média, quadrado perfeito, quadra central,  $\Delta$ seq<sup>2</sup>, esbelto, afirmações.

O foco do presente texto é estudar e hipotetizar um pouco sobre as médias das quadras, próprias ou impróprias.

DUAS AFIRMAÇÕES DEMONSTRADAS AQUI, SÃO

PRIMEIRA AFIRMAÇÃO -----

EM UM AGRUPAMENTO ÍMPAR QUALQUER, O VALOR DA MÉDIA DA SOMA DE TODAS AS MÉDIAS DAS QUADRAS PRÓPRIAS É IGUAL A MÉDIA DA QUADRA PRÓPRIA CENTRAL: UM QUADRADO PERFEITO ÍMPAR.

SEGUNDA AFIRMAÇÃO -----

EM UM AGRUPAMENTO PAR QUALQUER, A MÉDIA DA SOMA DAS MÉDIAS DE SUAS QUADRAS PRÓPRIAS É IGUAL A MÉDIA DE SUA QUADRA CENTRAL IMPRÓPRIA: UM QUADRADO PERFEITO ÍMPAR.

Abaixo, temos o  $\Delta_{\text{seq}^2}$  "esbelto", que será o objeto de estudo do texto aqui ofertado. Tentar-se-á entender algumas de suas regularidades, as quais surgem de sua estrutura triangular, ao longo do redigido.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     |     | 5   | 7   |     |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     |     | 11  | 13  |     |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     | 17  | 19  | 21  | 23  |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     | 27  | 29  | 31  | 33  |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 37  | 39  | 41  | 43  | 45  | 47  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 51  | 53  | 55  | 57  | 59  | 61  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 65  | 67  | 69  | 71  | 73  | 75  | 77  | 79  |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 83  | 85  | 87  | 89  | 91  | 93  | 95  | 97  |     |     |     |     |
|     |     |     | 101 | 103 | 105 | 107 | 109 | 111 | 113 | 115 | 117 | 119 |     |     |     |
|     |     |     | 123 | 125 | 127 | 129 | 131 | 133 | 135 | 137 | 139 | 141 |     |     |     |
|     |     | 145 | 147 | 149 | 151 | 153 | 155 | 157 | 159 | 161 | 163 | 165 | 167 |     |     |
|     |     | 171 | 173 | 175 | 177 | 179 | 181 | 183 | 185 | 187 | 189 | 191 | 193 |     |     |
|     | 197 | 199 | 201 | 203 | 205 | 207 | 209 | 211 | 213 | 215 | 217 | 219 | 221 | 223 |     |
|     | 227 | 229 | 231 | 233 | 235 | 237 | 239 | 241 | 243 | 245 | 247 | 249 | 251 | 253 |     |
| 257 | 259 | 261 | 263 | 265 | 267 | 269 | 271 | 273 | 275 | 277 | 279 | 281 | 283 | 285 | 287 |

Nesta imagem, estão enfatizadas as quadras próprias, em cores distintas. Cada uma das quadras é única, mesmo as impróprias.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |     |     |     |     |     | 5   | 7   |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     | 11  | 13  |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 17  | 19  | 21  | 23  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 27  | 29  | 31  | 33  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 37  | 39  | 41  | 43  | 45  | 47  |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 51  | 53  | 55  | 57  | 59  | 61  |     |     |     |     |
|     |     |     | 65  | 67  | 69  | 71  | 73  | 75  | 77  | 79  |     |     |     |
|     |     |     | 83  | 85  | 87  | 89  | 91  | 93  | 95  | 97  |     |     |     |
|     |     | 101 | 103 | 105 | 107 | 109 | 111 | 113 | 115 | 117 | 119 |     |     |
|     |     | 123 | 125 | 127 | 129 | 131 | 133 | 135 | 137 | 139 | 141 |     |     |
|     | 145 | 147 | 149 | 151 | 153 | 155 | 157 | 159 | 161 | 163 | 165 | 167 |     |
|     | 171 | 173 | 175 | 177 | 179 | 181 | 183 | 185 | 187 | 189 | 191 | 193 |     |
| 197 | 199 | 201 | 203 | 205 | 207 | 209 | 211 | 213 | 215 | 217 | 219 | 221 | 223 |
| 227 | 229 | 231 | 233 | 235 | 237 | 239 | 241 | 243 | 245 | 247 | 249 | 251 | 253 |

Os números em vermelho são os valores das médias de cada quadra. Observe que os valores seguem um padrão de organização que se opõe. Por exemplo, 23 é o valor da média da primeira quadra do segundo agrupamento. E 27 é o valor da segunda quadra do mesmo agrupamento.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |     |     |     |     |     |     | 5   | 7   |     |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     |     | 11  | 13  |     |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     | 17  | 19  | 21  | 23  |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     | 27  | 29  | 31  | 33  |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 37  | 39  | 41  | 43  | 45  | 47  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 51  | 53  | 55  | 57  | 59  | 61  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 65  | 67  | 69  | 71  | 73  | 75  | 77  | 79  |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 83  | 85  | 87  | 89  | 91  | 93  | 95  | 97  |     |     |     |     |
|     |     |     | 101 | 103 | 105 | 107 | 109 | 111 | 113 | 115 | 117 | 119 |     |     |     |
|     |     |     | 123 | 125 | 127 | 129 | 131 | 133 | 135 | 137 | 139 | 141 |     |     |     |
|     |     | 145 | 147 | 149 | 151 | 153 | 155 | 157 | 159 | 161 | 163 | 165 | 167 |     |     |
|     |     | 171 | 173 | 175 | 177 | 179 | 181 | 183 | 185 | 187 | 189 | 191 | 193 |     |     |
|     | 197 | 199 | 201 | 203 | 205 | 207 | 209 | 211 | 213 | 215 | 217 | 219 | 221 | 223 |     |
|     | 227 | 229 | 231 | 233 | 235 | 237 | 239 | 241 | 243 | 245 | 247 | 249 | 251 | 253 |     |
| 257 | 259 | 261 | 263 | 265 | 267 | 269 | 271 | 273 | 275 | 277 | 279 | 281 | 283 | 285 | 287 |

Na coluna de quadras, as que são azuis representam as que possuem média igual a um quadrado perfeito ímpar. Entre uma quadra azul e outra há uma quadra imprópria.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |     |     |     |     |     |     | 5   | 7   |     |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     |     | 11  | 13  |     |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     | 17  | 19  | 21  | 23  |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     |     | 27  | 29  | 31  | 33  |     |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 37  | 39  | 41  | 43  | 45  | 47  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     |     | 51  | 53  | 55  | 57  | 59  | 61  |     |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 65  | 67  | 69  | 71  | 73  | 75  | 77  | 79  |     |     |     |     |
|     |     |     |     | 83  | 85  | 87  | 89  | 91  | 93  | 95  | 97  |     |     |     |     |
|     |     |     | 101 | 103 | 105 | 107 | 109 | 111 | 113 | 115 | 117 | 119 |     |     |     |
|     |     |     | 123 | 125 | 127 | 129 | 131 | 133 | 135 | 137 | 139 | 141 |     |     |     |
|     |     | 145 | 147 | 149 | 151 | 153 | 155 | 157 | 159 | 161 | 163 | 165 | 167 |     |     |
|     |     | 171 | 173 | 175 | 177 | 179 | 181 | 183 | 185 | 187 | 189 | 191 | 193 |     |     |
|     | 197 | 199 | 201 | 203 | 205 | 207 | 209 | 211 | 213 | 215 | 217 | 219 | 221 | 223 |     |
|     | 227 | 229 | 231 | 233 | 235 | 237 | 239 | 241 | 243 | 245 | 247 | 249 | 251 | 253 |     |
| 257 | 259 | 261 | 263 | 265 | 267 | 269 | 271 | 273 | 275 | 277 | 279 | 281 | 283 | 285 | 287 |

Nesta imagem, temos uma visão explodida do esbelto, de modo a observarmos os agrupamentos. Em cinza, temos o valor da média de cada quadra própria. E em vermelho, como já mencionado anteriormente, os valores numéricos das quadras próprias; simplesmente marcados entre os entes que compõem as quadras.

[illegible]

Abaixo, temos as sequências de médias das quadras próprias por agrupamento, com ênfase nas MÉDIAS CENTRAIS, quadrados perfeitos.

#### 1º AGRUPAMENTO

Média próprias

$\{[(9)]\}$

Quadrado perfeito, média inscrita: 9

#### 2º AGRUPAMENTO

Médias próprias

$\{(23), 27\}$

Quadrado perfeito, média oculta: -

#### 3º AGRUPAMENTO

Médias próprias

$\{(45), [49], 53\}$

Quadrado perfeito, média inscrita: 49

#### 4º AGRUPAMENTO

Médias próprias

$\{(75), 79, 83, 87\}$

Quadrado perfeito, média oculta: -

#### 5º AGRUPAMENTO

Médias próprias

$\{(113), 117, [121], 125, 129\}$

Quadrado perfeito, média inscrita: 121

## 6º AGRUPAMENTO

Médias próprias

{(159), 163, 167, 171, 175, 179}

Quadrado perfeito, média oculta: -

## 7º AGRUPAMENTO

Médias próprias

{(213), 217, 221, [225], 229, 233, 237}

Quadrado perfeito, média inscrita: 225

## 8º AGRUPAMENTO

Médias próprias

{(275), 279, 283, 287, 291, 295, 299, 303}

Quadrado perfeito, média oculta: -

## 9º AGRUPAMENTO

Médias próprias

{(345), 349, 353, 357, [361], 365, 369, 373, 377}

Quadrado perfeito, média inscrita: 361

## 10º AGRUPAMENTO

Médias próprias

{(423), 427, 431, 435, 439, 443, 447, 451, 455, 459}

Quadrado perfeito, média oculta: -

## 11º AGRUPAMENTO

Médias próprias

{(509), 513, 517, 521, 525, [529], 533, 537, 541, 545, 549}

Quadrado perfeito, média inscrita: 529

.

.

.

Em um agrupamento com quantidades de QUADRAS PRÓPRIAS ÍMPARES, a média central do mesmo é um QUADRADO PERFEITO ÍMPAR.

E como todos os números quadrados perfeitos, juntamente com os termos centrais e quase quadrados perfeitos, foram removidos do  $\Delta_{seq^2}$  isósceles, de modo a ficarmos apenas com os termos ímpares que se encontravam entre aqueles removidos. Porém, é preciso ressaltar, OS ÍMPARES MAIS PROVÁVEIS DE SEREM PRIMOS!

#### UMA CONSEQUÊNCIA INTERESSANTE

Uma curiosa questão a cerca da remoção dos números mencionados acima é o fato de não ser possível marcar essas médias quadradas perfeitas entre os termos que compõe essas tais quadras desse, agrupamentos ímpares. Observando que é bem possível marcar as demais médias entre os termos das quadras do agrupamento.

Logo abaixo temos alguns dos primeiros quadrados perfeitos, termos centrais em agrupamentos com número ímpar de QUADRAS PRÓPRIAS.

{9, 49, 121, 225, 361, 529,...}

Ou, evidenciando o expoente 2, conseguimos

{ $3^2$ ,  $7^2$ ,  $11^2$ ,  $15^2$ ,  $19^2$ ,  $23^2$ ,...}

david-dias-marques-2026-019- analise do valor das médias e suas estruturas dentro do objeto do  $\Delta$  esbelto  
E de modo geral, de forma recursiva, pela dissecação algébrica observada, adquirimos:

$$(3 + 4(m - 1))^2$$

$$(3 + 4m - 4)^2$$

$$(4m - 1)^2$$

$$[ 16m^2 - 8m + 1 ]$$

Com  $m$  pertencente aos inteiros positivos, tal que  $m$  seja maior igual a 1.

A relação acima nos fornece a sequência de médias quadradas perfeitas para agrupamentos ímpares.

Como mais algumas percepções e observações acumuladas, chegamos a um tópico interessante, logo mais abaixo.

## MÉDIA DA SOMA DE TODAS AS QUADRAS PRÓPRIAS DE UM AGRUPAMENTO QUALQUER E UMA EXCENTRICIDADE

### PRIMEIRA AFIRMAÇÃO

É sabido que em agrupamentos ímpares a média da quadra central é um quadrado perfeito ímpar. E tal valor, percebeu-se depois, coincide com a média da soma de todos os entes do agrupamento, sem exceção ou repetição.

### A DEMONSTRAÇÃO FOI DIVIDIDA EM DUAS PARTES

#### DEMONSTRAÇÃO 1

#### MÉDIA GERALMENTE DE UM AGRUPAMENTO COM $p$ QUADRAS PRÓPRIAS

1º caso:  $m = 1$  -----

$$4m^2 + 2m + 4u - 1$$

Média: dividir por 1

$$[ 4m^2 + 2m + 4a - 1 ]$$

2º caso:  $m = 2$  -----

$$(4m^2 + 2m + 4a - 1) + (4m^2 + 2m + 4b - 1)$$

$$8m^2 + 4m + 4(a + b) - 2$$

Média: dividir por 2

$$[ 4m^2 + 2m + 2(a + b) - 1 ]$$

3º caso:  $m = 3$  -----

$$(4m^2 + 2m + 4a - 1) + (4m^2 + 2m + 4b - 1) +$$

$$(4m^2 + 2m + 4c - 1)$$

$$[ 12m^2 + 6m + 4(a + b + c) - 3 ]$$

Média: dividir por 3

$$[ 4m^2 + 2m + 4/3(a + b + c) - 1 ]$$

4º caso:  $m = 4$  -----

$$(4m^2 + 2m + 4a - 1) + (4m^2 + 2m + 4b - 1) +$$

$$(4m^2 + 2m + 4c - 1) + (4m^2 + 2m + 4d - 1)$$

$$[ 16m^2 + 8m + 4(a + b + c + d) - 4 ]$$

Média: dividir por 4

$$[ 4m^2 + 2m + (a + b + c + d) - 1 ]$$

.

.

.

De modo geral teremos

Para  $p$  quadras próprias

$$p \cdot 4m^2 + p \cdot 2m + 4(a + b + c + \dots + p) - p$$

Observe que a soma  $(a + b + c + \dots + p)$  nada mais é do que a soma dos termos da sequência dos naturais, ou inteiros positivos.

$$\text{Logo, } (a + b + c + \dots + p) = (1 + 2 + 3 + \dots + P) = p(p + 1)/2$$

Substituindo esse fato na relação anterior mais acima, conseguimos

$$p \cdot 4m^2 + p \cdot 2m + 4(p(p + 1)/2) - p$$

Simplificando um pouco

$$p \cdot 4m^2 + p \cdot 2m + 4(p(p + 1)/2) - p$$

$$p \cdot 4m^2 + p \cdot 2m + 4p(p + 1)/2 - p$$

$$p \cdot 4m^2 + p \cdot 2m + 2p(p + 1) - p$$

Média: dividir por  $p$

$$[ 4m^2 + 2m + 2(p + 1) - 1 ]$$

ou

$$[ 2(2m^2 + m + (p + 1)) - 1 ]$$

Mas o valor máximo de  $p$  vai coincidir com o valor de  $m$ . Sendo assim, pode-se substituir  $p$  por  $m$ , ou  $m$  por  $p$ . Afinal,  $p = m$ .

Porém, vou admitir a substituição de  $p$  por  $m$ .

Logo

$$2(2m^2 + m + (m + 1)) - 1$$

$$2(2m^2 + m + m + 1) - 1$$

$$2(2m^2 + 2m + 1) - 1$$

$$[ 4m^2 + 4m + 1 ]$$

ou

$$[ 4(m^2 + m) + 1 ]$$

A média geral de um agrupamento, de  $m$  quadras próprias, é 4 vezes um certo número retangular mais uma unidade. Sendo assim, pela forma de Fermat observada, um número quadrado perfeito ÍMPAR em cada caso.

Algumas manipulações algébricas

$$4m^2 + 4m + 1$$

$$[ (2m)^2 + 4m + 1 ]$$

Sobre  $2m$ , sabemos que  $[ 2m = m' ] \rightarrow m = m'/2$ , mas  $m' = \sqrt{q - 1}$ .

Logo,  $[ m = \sqrt{(q - 1)}/2 ]$ . Substituindo esse fato em  $4(m^2 + m) + 1$ , obteremos

$$(2\sqrt{(q - 1)}/2)^2 + 4(\sqrt{(q - 1)}/2) + 1$$

$$(\sqrt{(q - 1)})^2 + 2\sqrt{(q - 1)} + 1$$

Fechando o produto notável

$$[ (\sqrt{(q - 1)} + 1)^2 ]$$

## DEMONSTRAÇÃO 2

### MÉDIA DA QUADRA PRÓPRIA CENTRAL DE UM AGRUPAMENTO ÍMPAR

Princípio da estrutura do raciocínio

#### AGRUPAMENTO COM 1 QUADRA

A quadra central com média quadrada perfeita é a 1ª;

#### AGRUPAMENTO COM 3 QUADRAS

A quadra central com média quadrada perfeita é a 2ª;

### AGRUPAMENTO COM 5 QUADRAS

A quadra central com média quadrada perfeita é a 3ª;

### AGRUPAMENTO COM 7 QUADRAS

A quadra central com média quadrada perfeita é a 4ª;

### AGRUPAMENTO COM 9 QUADRAS

A quadra central com média quadrada perfeita é a 5ª;

.

.

.

### AGRUPAMENTO COM m QUADRAS

A quadra central com média quadrada perfeita é a  $(m + 1)/2$ .

Estruturando a relação

$$4m^2 + 2m + 4u - 1$$

Substituindo u por  $(m + 1)/2$  e desenvolvendo, obtemos

$$4m^2 + 2m + 4(m + 1)/2 - 1$$

$$4m^2 + 2m + 2(m + 1) - 1$$

$$4m^2 + 2m + 2m + 2 - 1$$

$$4m^2 + 2m + 2m + 1$$

$$4m^2 + 4m + 1$$

$$[ 4(m^2 + m) + 1 ]$$

Com isso com fica demonstrado que a média da soma de todos os entes de um agrupamento ímpar, cujas quadras são próprias, o mesmo que sem repetições, é um número quadrado perfeito ímpar. E o MESMO RESULTADO é encontrado na média da quadra própria central do mesmo agrupamento ímpar.

## SEGUNDA AFIRMAÇÃO

Descobriu-se depois, também, que a média da soma de todos os entes de agrupamento par, de quadras próprias, é uma quadrado perfeito ímpar. Muito similar a primeira afirmação. No entanto, sendo um pouco mais excêntrica, a afirmação sugere que o mesmo valor da média deste agrupamento é encontrada quando se pega a média da quadra imprópria central do mesmo.

## SOBRE AS MÉDIAS FORMADAS POR QUADRADOS PERFEITOS

Ou seja, todo e qualquer agrupamento ímpar ou par, possui um quadrado perfeito ímpar associado. E tais quadrados perfeitos estão organizados na seguinte sequência, representada logo abaixo.

{9, 25, 49, 81, 121, 169, 225,...}

O mesmo que

{ $3^2$ ,  $5^2$ ,  $7^2$ ,  $9^2$ ,  $11^2$ ,  $13^2$ ,  $15^2$ ,  $17^2$ ,...}

De modo geral

$$(3 + 2(m - 1))^2$$

Desenvolvendo e simplificando

$$9 + 12(m - 1) + 4(m - 1)^2$$

$$9 + 12m - 12 + 4(m^2 - 2m + 1)$$

$$9 + 12m - 12 + 4m^2 - 8m + 4$$

$$[ 4m^2 + 4m + 1 ]$$

Ou ainda

$[4(m^2 + m) + 1]$  que é número de Fermat.

Perceba, com excessão do número (um), todas as demais raízes dos quadrados perfeitos ímpares, da sequência acima, constituem a sequência dos números ímpares. A saber,  $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$ .

### DEMONSTRAÇÃO DA SEGUNDA AFIRMAÇÃO

Como já foi demonstrado na primeira parte da demonstração da primeira afirmação, temos que a média da soma de todos os entes de um agrupamento de quadras próprias sempre será um quadrado perfeito ímpar. E esse tal quadrado perfeito ímpar também é encontrado na média da quadra própria central de um agrupamento ímpar.

O objetivo agora é demonstrar que a média da quadra imprópria central de um agrupamento par, sempre será um quadrado perfeito ímpar. Cujo valor é o mesmo da média da soma de todos os entes desse mesmo agrupamento par.

### DEMONSTRAÇÃO

A quantidade de termos de uma linha,

$\sqrt{(q - 1)}$ , pode ser determinada, dentre as duas linhas que constituem um agrupamento, cujas quantidades são sempre idênticas, pela extração da raiz quadrada do primeiro termo menos uma unidade. Isso, partindo da primeira quadra. Muito embora seja possível partir de qualquer uma das quadras para obter tal valor, desde que haja uma compensação de valores. Todavia, a primeira quadra tem uma simplicidade maior em relação as demais.

OBS.: O primeiro termo da primeira quadra será denotado por  $(q)$ .

Logo, a relação é  $m' = \sqrt{(q - 1)}$ , estabelece o valor da quantidade de entes de uma das duas linhas de um agrupamento qualquer. Já  $p' = 2\sqrt{(q - 1)}$  estabelece a quantidade de entes de um agrupamento qualquer.

O valor de  $(m)$ , que é o número do agrupamento, pode ser definido através de tal relação, da seguinte forma.

$$4m = p'$$

Pois o número do agrupamento,  $m$ , é a quarta parte de  $p' = 2\sqrt{(q - 1)}$ , que é a quantidade total de entes de um agrupamento qualquer.

ou

$$[ 4m = 2\sqrt{(q - 1)} ]$$

Mas, como é possível simplificar, obtemos que

$$[ 2m = m' ]$$

ALGUMAS CONCLUSÕES SOBRE  $2m = m'$

Logo, o valor numérico do agrupamento,  $m$ , é a metade de  $m'$ , ou  $\sqrt{(q - 1)}/2$ . Veja, o valor de  $m$  coincide com o valor de  $w$ , logo

$$[ w = m ].$$

Portanto, o número de quadras próprias é igual ao número, em contagem natural, do agrupamento.

Algumas manipulações ALGÉBRICA nos conferirão o poder de obter o valor das médias, próprias e impróprias, através não de  $m$ , mas, do valor da raiz quadrada do menor quadrado perfeito de um agrupamento.

SOBRE AS QUADRAS IMPRÓPRIAS

Sabe-se que a quantidade de quadras próprias é definida por  $(w)$ . E a quantidade de quadras impróprias é definida por  $(v)$ . Logo, a quantidade de quadras impróprias é definida como  $v = w - 1$ . E o total de quadras de um agrupamento é definido como

$$j = 2w - 1.$$

## EXEMPLO:

Em um agrupamento com duas quadras próprias, temos uma quadra imprópria entre ambas. E o total de quadras desse mesmo agrupamento é de três quadras, dentre próprias e impróprias. Pois,  $(j)$ , que é  $2w - 1$ , nos garante que  $2(2) - 1 = 3$ . Nesse agrupamento temos 3 quadras, dentre próprias e impróprias.

Disso tiramos que precisamos definir um modo de calcular a média de uma quadra imprópria qualquer. DEPOIS, calcular-se-á a média da quadra imprópria central.

## CÁLCULO DA MÉDIA DE UMA QUADRA IMPRÓPRIA QUALQUER

Partiremos de um exemplo.

Seja o agrupamento abaixo, o 4º do esbelto, formado por quadras próprias. Aqui temos 4 próprias e 3 impróprias. As quadras impróprias estão sempre entre as quadras próprias.

65→67 --69→ 71--73→ 75 -- 77→79

↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓

83→85--87→89--91→93--95→97

Ao enfatizar as quadras impróprias, eventualmente haverá termos que não serão utilizados por tais objetos. Observe o diagrama. Mudou-se as setas de canto para que seja possível visualizar as quadras impróprias.

65--67→69-- 71→73--75 → 77--79

↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓

83--85→87 --89→91 --93→ 95--97

Isolando apenas as impróprias

$$67 \rightarrow 69 \quad --71 \rightarrow 73 \quad --75 \rightarrow 77$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$85 \rightarrow 87 \quad --89 \rightarrow 91 \quad --93 \rightarrow 95$$

Cada termos está equidistante do seu paralelo 4 unidade. De 67 a 71 temos uma diferença de 4 unidades. De 69 a 73, quatro unidades. De 85 a 89, quatro unidades. E de 87 a 91, quatro unidades. A mesma ideia por trás das médias próprias.

Dedução da relação que gera as médias impróprias

$$67 \rightarrow 69 \quad --71 \rightarrow 73 \quad --75 \rightarrow 77$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$85 \rightarrow 87 \quad --89 \rightarrow 91 \quad --93 \rightarrow 95$$

Quando contamos as QUADRAS PRÓPRIAS, contamos de quatro em quatro termos, ou simplesmente, de quadra em quadra. Todavia, quando acrescentamos as impróprias, o jogo muda, porque (j) nos garante que há  $(2w - 1)$  quadras, entre próprias e impróprias. E tais quadras distam em 2 unidades umas das outras, e não mais quatro. Por isso, em

$2(2m^2 + m + 2u) - 1$ , não teremos mais  $2u$ , mas  $2(u + 1)/2$ . Ou tão somente,  $(u + 1)$ . Contudo,  $u$  terá seu valor mínimo em 1 e seu máximo em (j).

Sendo assim, a relação que expressa melhor a média de quadras próprias e impróprias é

$$2(2m^2 + m + (u + 1)) - 1$$

ou

$$4m^2 + 2m + 2u + 2 - 1$$

$$4m^2 + 2m + 2u + 1$$

Mais simples

$$[ 2(2m^2 + m + u) + 1 ]$$

m é o valor numérico do agrupamento.

O valor numérico do grupamento pode ser definido por  $\sqrt{(q - 1)/2}$ , onde q é o menor ente numérico da primeira quadra.

E assim, os valores das médias das quadras do 4º agrupamento acima são

QUADRA PRÓPRIA

$$2(2(4)^2 + (4) + (1)) + 1 = 75$$

QUADRA IMPRÓPRIA

$$2(2(4)^2 + (4) + (2)) + 1 = 77$$

QUADRA PRÓPRIA

$$2(2(4)^2 + (4) + (3)) + 1 = 79$$

QUADRA IMPRÓPRIA

$$2(2(4)^2 + (4) + (4)) + 1 = 81$$

QUADRA PRÓPRIA

$$2(2(4)^2 + (4) + (5)) + 1 = 83$$

QUADRA IMPRÓPRIA

$$2(2(4)^2 + (4) + (6)) + 1 = 85$$

QUADRA PRÓPRIA

$$2(2(4)^2 + (4) + (7)) + 1 = 87$$

## SEGUNDO CASO -----

### TENTATIVA DE DISSECAÇÃO ALGÉBRICA

Exemplo

$$65 \rightarrow 67 \quad --69 \rightarrow 71 \quad --73 \rightarrow 75 \quad --77 \rightarrow 79$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$83 \rightarrow 85 --87 \rightarrow 89 --91 \rightarrow 93 --95 \rightarrow 97$$

### MODELO ALGÉBRICO-ESQUELÉTICO GERAL

$$(g + 1) \rightarrow (g + 3) \rightarrow (g + 5) \rightarrow (g + 7) \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(g' + 2) \rightarrow (g' + 4) \rightarrow (g' + 6) \rightarrow (g' + 8) \dots$$

OBS.: Sendo  $g'$  o quadrado perfeito sucessor de  $g$ , que também é quadrado perfeito.

### ESTRUTURA VISCERAL

$$(m'^2 + 1) \rightarrow (m'^2 + 3) \rightarrow (m'^2 + 5) \rightarrow (m'^2 + 7) \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(z^2 + 2) \rightarrow (z^2 + 4) \rightarrow (z^2 + 6) \rightarrow (z^2 + 8) \dots$$

Com  $z^2 = (m' + 1)^2$ , onde  $m'$  é raiz quadrada de  $g$ , sendo  $g$  o menor quadrado perfeito do agrupamento. E  $m'$  sempre será um número par. Isso é tão verdade, que  $[m' = 2m]$ . Já mencionado anteriormente neste corpo literário.

### ENTE GERAL - ESTRUTURA VISCERAL

$$(m'^2 + (2u - 1))$$

$$((m' + 1)^2 + 2u)$$

ou ainda, de modo geral e em sequência

Estrutura visceral 1

$$(m'^2 + (2u - 1))$$

↓

$$((m'^2 + 2m') + (2u + 1))$$

Estrutura visceral 2

$$(m'^2 + (2u - 1) + 2)$$

↓

$$((m'^2 + 2m') + (2u + 1) + 2)$$

SIMPLIFICANDO AS ESTRUTURAS

Estrutura visceral 1

$$(m'^2 + (2u - 1))$$

↓

$$((m'^2 + 2m') + (2u + 1))$$

Estrutura visceral 2

$$(m'^2 + (2u + 1))$$

↓

$$((m'^2 + 2m') + (2u + 3))$$

COLOCANDO NA FORMA DE UMA QUADRA

$$((m'^2) + (2u - 1)) \rightarrow ((m'^2) + (2u + 1))$$

↓

↓

$$((m'^2 + 2m') + (2u + 1)) \rightarrow ((m'^2 + 2m') + (2u + 3))$$

Somando os termos todos os termos das quadras

$$((m'^2) + (2u - 1)) + ((m'^2) + (2u + 1)) + ((m'^2 + 2m') + (2u + 1)) + ((m'^2 + 2m') + (2u + 3))$$

$$m'^2 + 2u - 1 + m'^2 + 2u + 1 + m'^2 + 2m' + 2u + 1 + m'^2 + 2m' + 2u + 3$$

$$4m'^2 + 4m' + 8u + 4$$

Dividindo por 4

$$[ m'^2 + m' + 2u + 1 ]$$

(m') é a raiz quadrada do menor quadrado perfeito do agrupamento. E m'/2 é o número do agrupamento.

OBS.: O menor quadrado perfeito de um agrupamento é o termo de menor valor da primeira quadra, menos uma unidade.

Exemplos

$$(8)^2 + (8) + 2(1) + 1 = 75$$

$$(8)^2 + (8) + 2(2) + 1 = 77$$

$$(8)^2 + (8) + 2(3) + 1 = 79$$

$$(8)^2 + (8) + 2(4) + 1 = 81$$

$$(8)^2 + (8) + 2(5) + 1 = 83$$

$$(8)^2 + (8) + 2(6) + 1 = 85$$

$$(8)^2 + (8) + 2(7) + 1 = 87$$

A partir dos dois casos possíveis, e mais simples, chega-se a conclusão que  $[ m'^2 + m' + 2u + 1 = 4m^2 + 2m + 2u + 1 ]$ .

Isso, pois, como sabemos  $2m = m'$ . Desse modo, então, podemos encontrar em  $4m^2 + 2m + 2u + 1$  o outro lado equivalente da igualdade, observe.

$$(2m)^2 + 2m + 2u + 1$$

$$[ m'^2 + m' + 2u + 1 ]$$

Veja,  $m'$  sempre será um número par. Desse modo, seria mais interessante substituir  $m'$ , por  $2m$ , pois como já é sabido,  $2m = m'$ . Por essa razão optaremos por  $2(2m^2 + m + u) + 1$ , com  $m$  pertencente aos inteiros positivos e  $m$  maior igual a 1. E que sempre será um número ímpar.

## MÉDIA DA QUADRA IMPRÓPRIA CENTRAL DE UM AGRUPAMENTO PAR.

1. Em um agrupamento par, o valor de  $(j)$  sempre será ímpar, pois  $w = \sqrt{(q - 1)/2}$ . Disso tiramos que  $(w)$  é um valor par, ou  $2k$ . Substituindo em  $(j)$ , obtemos  $2(2k) - 1$ , ou

$4k - 1$ , que nada mais é que um número ímpar.

2. SOBRE A POSIÇÃO DA QUADRA CENTRAL, observe os exemplos:

- Se tivermos 1 próprias, teremos 0 impróprias e 1 quadras no total;
- Se tivermos 2 próprias, teremos 1 impróprias e 3 quadras no total;
- Se tivermos 3 próprias, teremos 2 impróprias e 5 quadras no total;
- Se tivermos 4 próprias, teremos 3 impróprias e 7 quadras no total;
- Se tivermos 5 próprias, teremos 4 impróprias e 9 quadras no total;

...

Se tivermos um agrupamento com  $(w)$  quadras próprias, teremos  $(w - 1)$  quadras impróprias e  $(2w - 1)$  quadras, dentre próprias e impróprias, no total;

## DESENVOLVIMENTO DA DEMONSTRAÇÃO

O que vai nos importar para resolver o dilema da média central, de uma quadra imprópria, é sabermos como calcular o valor de  $u$  para tal média. E para tanto, usaremos  $(j)$ . Sendo que tal média, conjecturou-se ser sempre um quadrado perfeito ímpar. Cujo valor sempre coincide com o valor da média da soma de todas as médias próprias de um agrupamento qualquer.

O que queremos é definir um modo prático de encontrar o valor do  $u$  central, para quando seja substituído em  $2(2m^2 + m + u) + 1$  possamos encontrar o valor esperado. Sabe-se que  $(j + 1)/2$ , o mesmo que

$((2w - 1) + 1)/2$ , que por sua vez resulta em

$(w)$ . E  $w = \sqrt{(q - 1)/2}$ , com  $q$  sendo o menor ente da primeira quadra.

Portanto, o  $(u)$  da quadra imprópria central é dado por  $[\sqrt{(q - 1)/2}]$

Substituindo a relação encontrada em

$2(2m^2 + m + u) + 1$ , conseguimos

$2(2m^2 + m + (\sqrt{(q - 1)/2})) + 1$

Desenvolvendo

$4m^2 + 2m + 2(\sqrt{(q - 1)/2}) + 1$

$4m^2 + 2m + 2\sqrt{(q - 1)/2} + 1$

$[4m^2 + 2m + \sqrt{(q - 1)} + 1]$

ou ainda

$(2m)^2 + 2m + \sqrt{(q - 1)} + 1$

Substituindo  $m$  por  $\sqrt{(q - 1)/2}$ , adquirimos

$(2\sqrt{(q - 1)/2})^2 + 2\sqrt{(q - 1)/2} + \sqrt{(q - 1)} + 1$

$(\sqrt{(q - 1)})^2 + \sqrt{(q - 1)} + \sqrt{(q - 1)} + 1$

$(\sqrt{(q - 1)})^2 + 2\sqrt{(q - 1)} + 1$

Fechando o produto notável

$(\sqrt{(q - 1)} + 1)^2$

Como  $(q)$  sempre é um número ímpar,

$\sqrt{(q - 1)}$  sempre será PAR. Sendo assim,

$(\sqrt{(q - 1)} + 1)^2$  sempre será um quadrado perfeito ÍMPAR.



David Dias Marques,

Entusiasta Matemático e

Colaborador do WebSite Os Fantásticos Números Primos